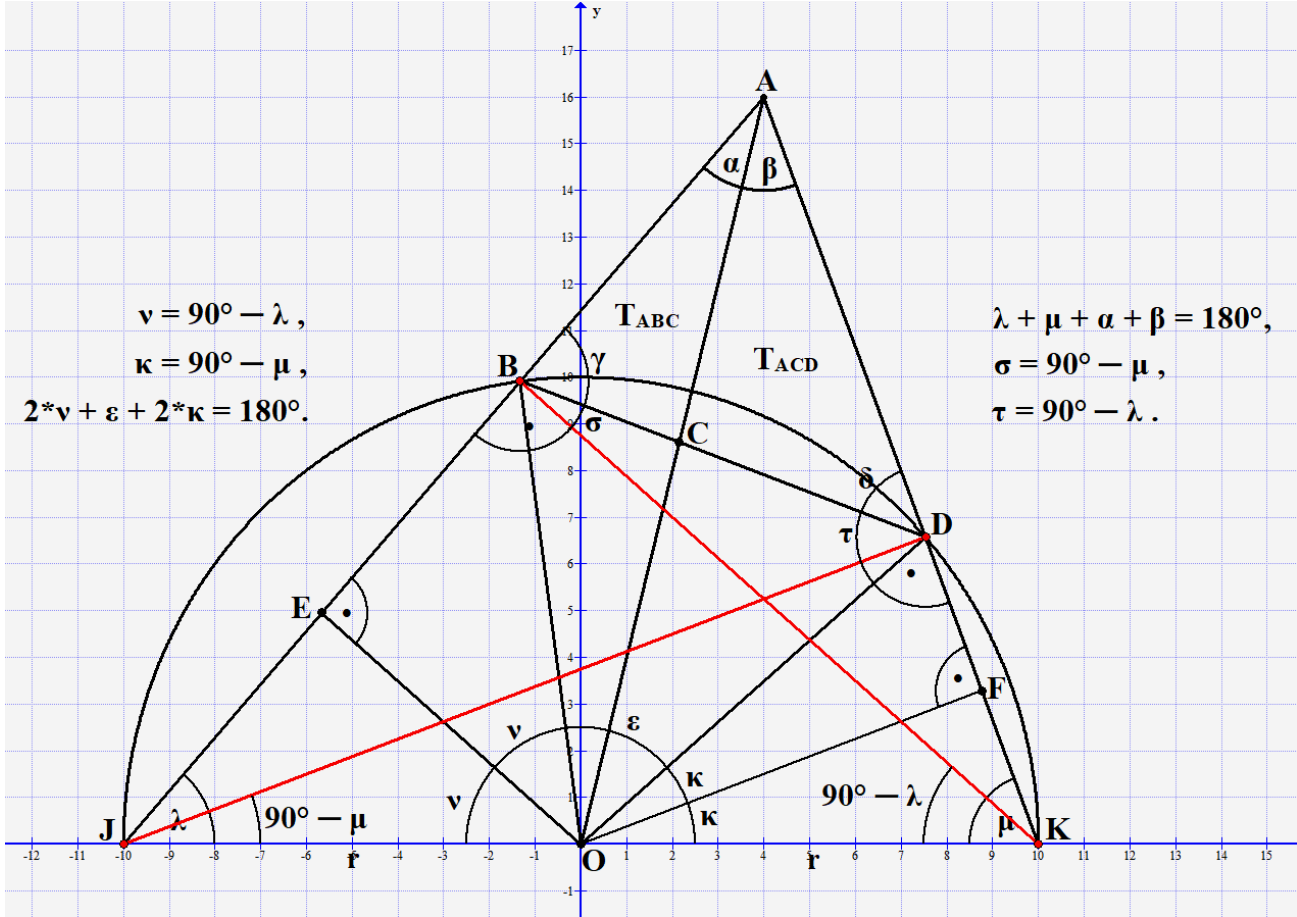


Egy érdekes síkgeometriai feladat – 2. rész

Dolgozatunk 1. részében – ld.: *)! – kapott némely eredményünket most más úton vezetjük le, valamint újabb részfeladatokat is kitűzünk és megoldunk itt.

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Először kiszámítjuk a **BD** szakasz hosszát; szinusztétellel kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BD}}{\overline{BJ}} &= \frac{\overline{BD}}{2 \cdot r \cdot \cos \lambda} = \frac{\sin[\lambda - (90^\circ - \mu)]}{\sin \tau} = \frac{\sin(\lambda + \mu - 90^\circ)}{\sin \tau} = \frac{\sin\{-(90^\circ - (\lambda + \mu))\}}{\sin \tau} = -\frac{\sin[90^\circ - (\lambda + \mu)]}{\sin \tau} = \\ &= -\frac{\cos(\lambda + \mu)}{\sin \tau} \rightarrow \overline{BD} = -2 \cdot r \cdot \cos \lambda \cdot \frac{\cos(\lambda + \mu)}{\sin \tau}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mint hogy a **BJ** köríven nyugvó kerületi szögek egyenlők, ezért:

$$\tau = 90^\circ - \lambda; \quad (2)$$

most (1) és (2) - vel:

$$\overline{BD} = -2 \cdot r \cdot \cos \lambda \cdot \frac{\cos(\lambda + \mu)}{\sin(90^\circ - \lambda)} = -2 \cdot r \cdot \cos \lambda \cdot \frac{\cos(\lambda + \mu)}{\cos \lambda} = -2 \cdot r \cdot \cos(\lambda + \mu),$$

tehát:

$$\underline{\underline{\overline{BD} = -2 \cdot r \cdot \cos(\lambda + \mu) \quad .}} \quad (3)$$

Másodszor: kiszámítjuk az **AB** szakasz hosszát. Ismét szinusztétellel, (3) - mal is:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} &= \frac{\sin \delta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \delta}{\sin[180^\circ - (\lambda + \mu)]} = \frac{\sin \delta}{\sin(\lambda + \mu)} \rightarrow \\ \overline{AB} &= \overline{BD} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin(\lambda + \mu)} = -2 \cdot r \cdot \cos(\lambda + \mu) \cdot \frac{\sin \delta}{\sin(\lambda + \mu)} . \end{aligned} \quad (4)$$

A 2. ábráról, (2) - vel is:

$$\delta = 90^\circ - \tau = \lambda , \quad (5)$$

így (4) és (5) szerint:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= -2 \cdot r \cdot \cos(\lambda + \mu) \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin(\lambda + \mu)} = -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} \rightarrow \\ \underline{\underline{\overline{AB} &= -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} .}} \end{aligned} \quad (6)$$

Harmadszor: kiszámítjuk az **AD** szakasz hosszát. Megint szinusztétellel, (3) - mal is:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} &= \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\lambda + \mu)} \rightarrow \overline{AD} = \overline{BD} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\lambda + \mu)} = -2 \cdot r \cdot \cos(\lambda + \mu) \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\lambda + \mu)} \rightarrow \\ \overline{AD} &= -2 \cdot r \cdot \cos(\lambda + \mu) \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\lambda + \mu)} . \end{aligned} \quad (7)$$

Mínt hogy a **DK** köríven nyugvó kerületi szögek egyenlők, ezért

$$\sigma = 90^\circ - \mu . \quad (8)$$

A 2. ábráról, (8) - cal is:

$$\gamma = 90^\circ - \sigma = \mu . \quad (9)$$

Most (7) és (9) - cel:

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= -2 \cdot r \cdot \cos(\lambda + \mu) \cdot \frac{\sin \mu}{\sin(\lambda + \mu)} = -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \mu}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} \rightarrow \\ \underline{\underline{\overline{AD} &= -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \mu}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} .}} \end{aligned} \quad (10)$$

Az eddigiekkel, (6) és (10) hányadosából:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\sin \lambda}{\sin \mu} ; \quad (11)$$

az 1. rész (16) képletével:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \lambda}{\sin \mu} ; \quad (12)$$

majd (11) és (12) - vel:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} , \quad (13)$$

egyezésben az 1. rész (11) képletével.

Rátérve a területekre:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot m_{BC} , \quad T_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot m_{CD} . \quad (14)$$

Mivelhog az 1. ábra alapján írhatjuk, hogy:

$$m_{BC} = m_{CD}(= m_{BD}) , \quad (15)$$

így a területek aránya, (14) és (15) - tel is:

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot m_{BC}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot m_{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} . \quad (16)$$

Ámde szinusztétellel, (9) - cel is:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha}{\sin \mu} \rightarrow \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \mu} ; \quad (17)$$

ismét szinusztétellel, (5) - tel is:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\sin \beta}{\sin \delta} = \frac{\sin \beta}{\sin \lambda} \rightarrow \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \lambda} ; \quad (18)$$

most (16), (17) és (18) - cal:

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \mu}}{\overline{AC} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \lambda}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \mu} , \quad (19)$$

majd pedig (12) és (19) szerint:

$$\underline{\underline{\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} = \frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 \mu} ,}} \quad (20)$$

egyezésben az 1. rész (12) és (29) eredményeivel.

Most kiszámítjuk az **AC**, **BC** és **CD** szakasz hosszakat, a szinusztétel alkalmazásával.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \gamma}{\sin[180^\circ - (\alpha + \gamma)]} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{\sin \mu}{\sin(\alpha + \mu)} \rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin \mu}{\sin(\alpha + \mu)} \rightarrow (6) \rightarrow$$

$$\underline{\underline{\overline{AC} = -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} \cdot \frac{\sin \mu}{\sin(\alpha + \mu)}}} \quad (21)$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \alpha}{\sin[180^\circ - (\alpha + \gamma)]} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \mu)} \rightarrow \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \mu)} \rightarrow (6) \rightarrow$$

$$\underline{\underline{\overline{BC} = -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \mu)}}} \quad (22)$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\sin \beta}{\sin[180^\circ - (\beta + \delta)]} = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \delta)} = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \lambda)} \rightarrow \overline{CD} = \overline{AD} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \lambda)} \rightarrow (10) \rightarrow$$

$$\underline{\underline{\overline{CD} = -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \mu}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \lambda)}}} \quad (23)$$

A β - ra és α - ra vonatkozó összefüggéseket az 1. rész (27) és (28) képletei adják meg:

$$\beta(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \cdot \arcsin \left[2 \cdot \frac{\sin(\lambda + \mu)}{\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} + \frac{2 \cdot \sin \mu - \cos \lambda \cdot \sin(\lambda + \mu)}{2 \cdot \sin \lambda - \cos \mu \cdot \sin(\lambda + \mu)}} \right], \quad (24 / 1)$$

$$\alpha(\lambda, \mu) = 180^\circ - [\lambda + \mu + \beta(\lambda, \mu)]. \quad (24 / 2)$$

Megjegyzések:

M1. Látható, hogy itt részben lényegesen más úton jutottunk az 1. rész megfelelő eredményeihez.

M2. Az 1. ábrán nem jelöltük be a (15) szerinti magasságokat.

M3. A szakaszhosszakra kapott negatív előjelű eredmények valójában pozitívok, mert a bennük szereplő $(\lambda + \mu)$ szög tompaszög, ennek koszinusza és tangense pedig negatív.

M4. Látjuk, hogy a számítások eléggé nehézkes képletekre vezetnek. Ebben az esetben a szerkesztés sokkal egyszerűbben juttat célhoz. A szerkesztéssel kapott eredmények pontossága azonban már kérdéses. Úgy látjuk, hogy ennél a feladatnál az az észszerű magartás, hogy az eredményeket számítással és szerkesztéssel is előállítjuk; ekkor csökken a tévesztés veszélye is.

M5. Fentiek szerint az újabb eredményekre vonatkozó feladatunk kiírása az alábbi lehet.

Adott: r, λ, μ .

Keresett: BD, AB, AD, AC, BC, CD . (K)

A kapott eredményeket egy számpéldában alkalmazzuk.

Határozzuk meg a (K) szerinti szakasz hosszakat az 1. részből átvett alábbi adatok, illetve eredmények esetére!

Adatok:

$$\lambda = 48,81407483^\circ, \mu = 69,44395478^\circ; r = 10 \text{ cm};$$

$$\alpha = 27,14968169^\circ, \beta = 34,5922887^\circ. \quad (A)$$

$$\overline{BD} = -2 \cdot r \cdot \cos(\lambda + \mu) = -2 \cdot 10 \text{ (cm)} \cdot \cos(48,81407483^\circ + 69,44395478^\circ) =$$

$$= -20 \text{ (cm)} \cdot (-0,4734431133) = 9,468862266 \text{ (cm)} \approx 9,47 \text{ (cm)}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\overline{BD} \approx 9,47 \text{ cm}}}. \quad (a)$$

$$\overline{AB} = -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} = -2 \cdot 10 \text{ (cm)} \cdot \frac{\sin 48,81407483^\circ}{\operatorname{tg}(48,81407483^\circ + 69,44395478^\circ)} =$$

$$= -20 \text{ (cm)} \cdot (-0,4045099733) = 8,090199466 \text{ (cm)} \approx 8,09 \text{ (cm)}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\overline{AB} \approx 8,09 \text{ cm}}}. \quad (b)$$

$$\overline{AD} = -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \mu}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} = -2 \cdot 10 \text{ (cm)} \cdot \frac{\sin 69,44395478^\circ}{\operatorname{tg}(48,81407483^\circ + 69,44395478^\circ)} =$$

$$= -20 \text{ (cm)} \cdot (-0,5032769328) = 10,06553866 \text{ (cm)} \approx 10,07 \text{ (cm)}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\overline{AD} \approx 10,07 \text{ cm}}}. \quad (c)$$

$$\overline{AC} = -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} \cdot \frac{\sin \mu}{\sin(\alpha + \mu)} =$$

$$= -2 \cdot 10 \text{ (cm)} \cdot \frac{\sin 48,81407483^\circ}{\operatorname{tg}(48,81407483^\circ + 69,44395478^\circ)} \cdot \frac{\sin 69,44395478^\circ}{\sin(27,14968169^\circ + 69,44395478^\circ)} =$$

$$= -20 \text{ (cm)} \cdot (-0,4045099733) \cdot (0,942563742) =$$

$$= -20 \text{ (cm)} \cdot (-0,3812764341) = 7,625528682 \text{ (cm)} \approx 7,63 \text{ (cm)}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\overline{AC} \approx 7,63 \text{ cm}}}. \quad (d)$$

$$\overline{BC} = -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \mu)} =$$

$$= -2 \cdot 10 \text{ (cm)} \cdot \frac{\sin 48,81407483^\circ}{\operatorname{tg}(48,81407483^\circ + 69,44395478^\circ)} \cdot \frac{\sin 27,14968169^\circ}{\sin(27,14968169^\circ + 69,44395478^\circ)} =$$

$$= -20 \text{ (cm)} \cdot (-0,4045099733) \cdot (0,4593550399) =$$

$$= -20 \text{ (cm)} \cdot (-0,1858136949) = 3,716273899 \text{ (cm)} \approx 3,72 \text{ (cm)} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\overline{BC} \approx 3,72 \text{ cm}}} . \quad (\text{e})$$

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= -2 \cdot r \cdot \frac{\sin \mu}{\operatorname{tg}(\lambda + \mu)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \lambda)} = \\ &= -2 \cdot 10 \text{ (cm)} \cdot \frac{\sin 69,44395478^\circ}{\operatorname{tg}(48,81407483^\circ + 69,44395478^\circ)} \cdot \frac{\sin 34,5922887^\circ}{\sin(34,5922887^\circ + 48,81407483^\circ)} = \\ &= -20 \text{ (cm)} \cdot (-0,5032769328) \cdot (0,5715132159) = \\ &= -20 \text{ (cm)} \cdot (-0,2876294184) = 5,752588367 \text{ (cm)} \approx 5,75 \text{ (cm)} , \text{ tehát:} \\ \underline{\underline{\overline{CD} \approx 5,75 \text{ cm}}} . \quad (\text{f}) \end{aligned}$$

Az (a), ... , (f) eredmények jól egyeznek a 2. ábráról lemérhető értékekkel. Utóbbiak nyerése persze kissé nehézkes, nem olyan könnyű, mint a szögek lemérése. Ezért is kell gyakorolni. Erre is mutatunk egy példát.

PÉLDA

A számítógép monitorjáról valamilyen nagyításnál lemértük az alábbi adatokat:

$$R(\overline{OK}) = 10,25 \text{ (cm)} \rightarrow V(\overline{OK}) = 10,00 \text{ (cm)} .$$

A monitorképi rajz **M** méretaránya (is) az **R** rajzi hossz és a **V** valódi hossz hányadosa:

$$M = \frac{R}{V} = \frac{R(\overline{OK})}{V(\overline{OK})} = \frac{10,25}{10,00} = 1,025 .$$

Továbbá a **CD** szakaszra méréssel a rajzi hossz:

$$R(\overline{CD}) = 5,90 \text{ (cm)} .$$

Most ezzel a méretarány kifejezése:

$$\begin{aligned} M = \frac{R}{V} = \frac{R(\overline{CD})}{V(\overline{CD})} \rightarrow 1,025 = \frac{5,90 \text{ (cm)}}{V(\overline{CD})} \rightarrow V(\overline{CD}) = \frac{5,90 \text{ (cm)}}{1,025} \approx 5,76 \text{ (cm)} , \text{ tehát:} \\ V(\overline{CD}) \approx 5,76 \text{ (cm)} \leftrightarrow \overline{CD} \approx 5,75 \text{ (cm)} , \end{aligned}$$

ami jó egyezésnek mondható. Itt azzal a feltevéssel éltünk, hogy a képernyő minden részen ugyanazt a rajzi méretarányt találjuk. (Ez vélhetően csak jó közelítéssel áll fenn.)

M6. Nem felejtjük el, hogy az 1. ábrán a **B** és **D** pontoknál *Thalész* tétele miatt van egy-egy derékszög is berajzolva.

M7. Egy ellenőrzési lehetőség az 1. ábra és adatai szerint az alábbi.

$$\overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BD} . \quad (25)$$

Most (e), (f), (a) és (25) szerint:

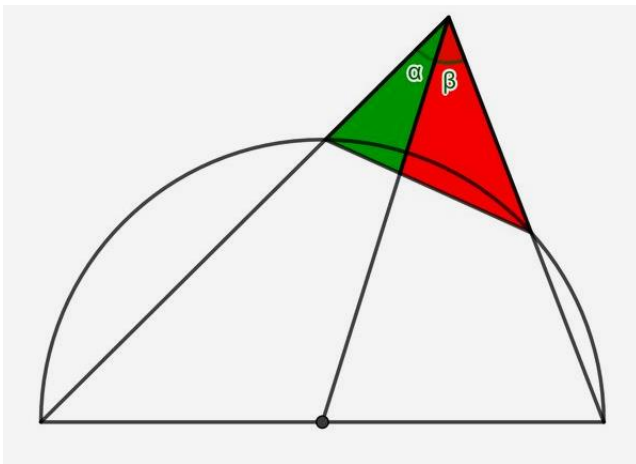
$$3,716273899 \text{ (cm)} + 5,752588367 \text{ (cm)} = 9,468862266 \text{ (cm)} \rightarrow \\ 9,468862266 \text{ (cm)} = 9,468862266 \text{ (cm)} , \text{ O.K.} \quad (\S)$$

(25) azért ad egy ellenőrzési lehetőséget, mert a benne szereplő hosszakat egymástól függetlenül határoztuk meg.

Meglepő az összes számjegyre történő egyezés (§) bal és jobb oldalán. Ez mindjárt értelmet ad annak, hogy az (A) - ban szereplő szögeket miért írtuk fel / határoztuk meg a tizedesvessző utáni oly sok számjegyre pontosan; valamint annak is, hogy miért nem kerekített értékekkel számoltunk tovább.

Az érdeklődő Olvasó (25) teljesülését úgy is beláthatja, hogy a megfelelő képletekkel dolgozva azonosságra jut. Javasoljuk e számítás elvégzését is!

M8. Azt gondoljuk, hogy a megadott feladat némiképpen „kimódolt”. (Ez meglepő?) Ehhez vessünk egy pillantást az eredeti ábrára is!



2. ábra – forrása: [1]

Állításunk mellett azzal érvelünk, hogy az α és β szögek nem közvetlen bemenő adatok, hanem eredmények. A közvetlen bemenő adatok pl. a λ és μ szögek, melyek alkalmazásával előáll az $(\alpha + \beta)$ szög csúcsa, melyet a kör középpontjával összekötve kapjuk meg külön - külön az α és β szögeket. Ennek megfelelően a

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} \equiv \frac{T_{zöld}}{T_{piros}} \rightarrow \frac{T_{zöld}}{T_{piros}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} , \quad \frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 \mu} \quad (20 / 1)$$

képletek utolsója tűnik számunkra jogosabbnak, nem vitatva az aláhúzott képlet szépségét.

Tény, hogy pl. a szelőtételes megoldáshoz α - n és β - n kívül nem kellene más szögek. Nem felejtethjük el, hogy ha ez a feladat egy versenyfeladat, akkor az előbb említett „kimódoltság” mindjárt érthetőbb. (Tudjuk, hogy az írásbeli érettségi is egy verseny, hiszen akár az egyetemi felvétel is múlhat az eredményén.)

Ajánlott olvasmány:

*) [Egy érdekes síkgeometriai feladat.pdf \(galgoczi.net\)](#)

Forrás:

[1] – <https://mirangu.com/through-the-roof/#more-10233>

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2024. 01. 23.

Továbbiak: www.galgoczi.net